

## 具有两种平移特性的2T1R并联机构的设计与分析

蔡祥<sup>1</sup> 高波<sup>2</sup> 石志新<sup>3</sup>

(1. 湖北职业技术学院 机电工程学院, 孝感 432000)

(2. 新星职业技术学院 机电工程系, 新星 839000)

(3. 南昌大学 先进制造学院, 南昌 330031)

**摘要:**【目的】针对两平移一转动(2T1R)并联机构中实现曲线平移需要复杂算法曲线拟合的问题,设计了一种利用机构本身特性即可实现沿曲线平移的新型机构。【方法】首先,基于方位特征(Position and Orientation Characteristic, POC)集方程的并联机构设计理论,设计了一种具有符号式位置正解的2T1R并联机构,并对该机构进行方位特征集、自由度以及耦合度等拓扑性能分析;其次,基于拓扑结构运动学建模原理,完成了该机构的符号式位置正解方程、符号式位置逆解方程的构建,并通过具体数值计算验证了机构的正逆解方程的正确性;最后,使用Matlab软件对该机构的弯曲平移及平直运动两种平移特性进行了验证。【结果】结果表明,所设计机构在工作空间内同时具有平直运动和弯曲平移的移动特性,极大地简化了在实现弯曲平移方面的复杂程度及控制算法的难度。

**关键词:** 并联机构; 拓扑设计; 弯曲平移; 解析解; 耦合度

**中图分类号:** TH112 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2025.09.007

## 0 引言

具有移动、转动两种输出特性的2T1R空间并联机构,因其驱动部件数量少、加工制造便捷,不仅在农业水果抓取、工业搬运等操作场景中具有广泛的应用前景,同时还具备较高的理论研究价值<sup>[1196-213][2-6]</sup>。

当前,国内外学者针对两平移一转动(2T1R)并联机构的研究取得了一定的成果。杜中秋等<sup>[7]</sup>设计了一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型2T1R并联机构。沈惠平等<sup>[8]</sup>设计了零耦合度部分运动解耦的2T1R并联机构。WANG等<sup>[9]</sup>考虑具体情况,提出Cylindrical型2T1R空间并联机构。KONG等<sup>[10]</sup>应用螺旋理论,设计了一系列具有2T1R运动特性的空间并联机构。张彦斌等<sup>[11]</sup>深入分析机构运动特性,提出部分新型具有两平移一转动运动特性的并联机构。杨廷力<sup>[12]</sup>基于单开链单元理论,设计得到了多种新型具有两平移一转动运动特性的空间并联机构。黄凯伟等<sup>[13]</sup>研发了存在部分运动解耦以及符号式位置正

解的一种具有2T1R运动特性的并联机构,并对其完成了动力学建模。沈惠平等<sup>[14]</sup>设计了拥有解析式位置正解方程的2T1R并联机构。刘伟等<sup>[15]</sup>采用旋量理论设计了一系列具有3T、2T1R和2R1T模式的并联机构。

分析上述文献中空间并联机构的运动特性可以发现,大部分学者研究的2T1R机构二维平移空间均是在平面上进行平直运动,具有一定的运动局限性,鲜有学者研究弯曲平移运动。基于此,本文应用方位特征(Position and Orientation Characteristic, POC)集理论,提出一种新型的具有弯曲平移运动特征的3自由度并联机构。该机构未来可适用于工业领域中的货物自动搬运、卸载及快速避障等任务场景。

## 1 并联机构设计及其拓扑特性分析

### 1.1 并联机构的特征描述

本文基于方位特征集理论,设计了一种具有2T1R运动特性的空间并联机构。图1为该空间并联机构简图。图2为使用SolidWorks软件构建的并联机

收稿日期: 2024-05-09 修回日期: 2024-06-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(52165003)

作者简介: 蔡祥,男,1997年生,河南新乡人,硕士;主要研究方向为智能优化算法、拓扑结构优化; 975747835@qq.com。

石志新(通信作者),男,1979年生,湖北黄梅人,博士,教授;主要研究方向为机器人机构学、机电系统创新设计等; shizhixin@ncu.edu.cn。

引用格式: 蔡祥,高波,石志新. 具有两种平移特性的2T1R并联机构的设计与分析[J]. 机械传动, 2025, 49(9): 55-63.

CAI Xiang, GAO Bo, SHI Zhixin. Design and analysis of 2T1R parallel mechanism with two kinds of translation characteristics[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2025, 49(9): 55-63.

构三维模型图。

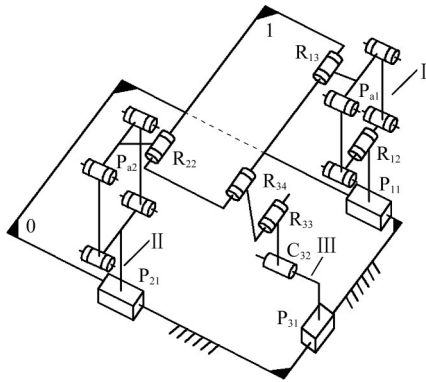


图1 2T1R空间并联机构简图

Fig. 1 Schematic diagram of the spatial parallel mechanism with 2T1R

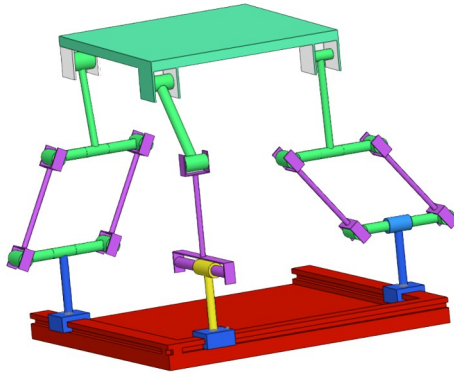


图2 并联机构三维模型图

Fig. 2 3D model diagram of the parallel mechanism

该并联机构由5部分组成：动平台1、静平台0、支链I、支链II以及支链III。静平台0、动平台1均为正方形。支链I、支链II以及支链III将机构的静平台与动平台连接起来。支链I由 $P_{11}$ 副、 $R_{12}$ 副、平行四边形机构 $P_{a1}$ 、 $R_{13}$ 副组成， $P_{11}$ 副与平行四边形机构 $P_{a1}$ 保持垂直关系， $R_{12}$ 副、 $R_{13}$ 副保持相互平行的关系， $P_{11}$ 副垂直于 $R_{12}$ 副、 $R_{13}$ 副；支链II由 $P_{21}$ 副、平行四边形机构 $P_{a2}$ 副、 $R_{22}$ 副组成， $P_{21}$ 副与平行四边形机构 $P_{a2}$ 副刚性连接， $P_{21}$ 副与 $P_{a2}$ 副保持垂直关系， $P_{21}$ 副、 $R_{22}$ 副的轴线保持垂直关系；支链III由 $P_{31}$ 副、 $C_{32}$ 副、 $R_{33}$ 副以及 $R_{34}$ 副串联组成， $P_{31}$ 副与 $R_{33}$ 副、 $R_{34}$ 副平行， $P_{31}$ 副与 $C_{32}$ 副垂直； $P_{11}$ 副、 $P_{21}$ 副以及 $P_{31}$ 副始终与静平台0相连， $P_{11}$ 副与 $P_{21}$ 副保持平行关系， $P_{11}$ 副、 $P_{21}$ 副均垂直于 $P_{31}$ 副； $R_{13}$ 副、 $R_{22}$ 副以及 $R_{34}$ 副与动平台相连， $R_{13}$ 副与 $R_{34}$ 副保持共线关系且均平行于 $R_{22}$ 副。

## 1.2 并联机构拓扑特性分析

### 1.2.1 求解机构动平台POC集

易知，空间并联机构的POC集方程<sup>[11]96-213</sup>为

$$M_{b_u} = \bigcup_{i=1}^{m_u} M_{J_i} \quad (1)$$

$$M_{pa} = \bigcap_{u=1}^n M_{b_u} \quad (2)$$

式中， $M_{b_u}$ 为第 $u$ 条支链的POC集； $m_u$ 为第 $u$ 条支链的运动副数； $M_{J_i}$ 为第 $i$ 个运动副的POC集； $M_{pa}$ 为动平台的POC集； $n$ 为支链数。

本文中，“||”表示运动副之间是平行关系；“ $\diamond$ ”表示运动副之间保持共面关系；“ $\perp$ ”表示运动副之间保持垂直关系；“-”表示运动副之间是连接关系。

取该机构动平台上几何中心为基点，下面依次求解3条支链末端构件、动平台的POC集。

#### 1) 求解支链I末端构件的POC集

在支链I中，4个运动副之间的拓扑结构关系为 $\{-P_{11}(-P_{a1})\perp R_{12}\|R_{13}-\}$ 。根据机构的POC集方程，支链I末端构件的POC集为

$$M_{b_1} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\|R_{13}) \end{bmatrix}$$

#### 2) 求解并联机构中支链II的POC集

在支链II中，各运动副之间的拓扑结构关系为 $\{-P_{21}(-P_{a2})\perp R_{22}-\}$ 。同理，支链II末端构件的POC集为

$$M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^1(\|P_{21}) \cup t^1(\perp P_{21}) \\ r^1(\|R_{22}) \end{bmatrix}$$

#### 3) 求解并联机构中支链III的POC集

显然，在支链III中，所有运动副的拓扑结构关系为 $\{-P_{31}(\perp C_{32})\|R_{33}\|R_{34}-\}$ 。则支链III末端构件的POC集为

$$M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\|C_{32}) \cup r^1(\|R_{34}) \end{bmatrix}$$

#### 4) 求解动平台的POC集

由式(2)的计算方法，易得到

$$M_{pa} = \bigcap_{u=1}^3 M_{b_u} = \begin{bmatrix} t^1(\|P_{21}) \cup t^1(\perp P_{21}) \\ r^1(\|R_{22}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)充分表明，该机构的动平台1能够实现2T1R的运动特性。

### 1.2.2 求解自由度

1) 空间并联机构的自由度(Degree Of Freedom, DOF)计算式<sup>[16]</sup>为

$$\begin{cases} F_d = \sum_{i=1}^{m_u} f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \\ \xi_{L_j} = \dim \cdot \{ (\bigcap_{u=1}^j M_{b_u}) \cup M_{b_{j+1}} \} \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $F_d$  为机构的DOF;  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度;  $\xi_{L_j}$  为第  $j$  个独立回路的独立位移方程数;  $v$  为独立回路数;  $\dim. \{ \cdot \}$  为方位特征集的维数。

2) 机构自由度求解

① 求解第1个回路的独立位移方程数  $\xi_{L_1}$

支链 I 与支链 II 共同组成第1个回路, 第1个回路同时也被称为第1个子并联机构。计算第1个回路的独立位移方程数  $\xi_{L_1}$ , 有

$$\xi_{L_1} = \dim. \{ M_{b_1} \cup M_{b_2} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{21}) \cup t^1(\perp P_{21}) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix} \right\} = 4$$

由式(4)、式(1)、式(2)计算得到, 第1个子并联机构的DOF、POC集分别为

$$F_{d(1-2)} = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{L_j} = 7 - 2 - 4 = 3$$

$$M_{pa(1-2)} = M_{b_1} \cap M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{21}) \cup t^1(\perp P_{21}) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{21}) \cup t^1(\perp P_{21}) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix}$$

② 求解第2个回路的独立位移方程数  $\xi_{L_2}$

$$\xi_{L_2} = \dim. \{ M_{pa(1-2)} \cup M_{b_3} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel C_{32}) \cup r^1(\parallel R_{34}) \end{bmatrix} \right\} = 5$$

同理, 按照式(4)、式(1)、式(2)计算并联机构的DOF, 有

$$F_d = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = 12 - (4 + 5) = 3$$

综上所述, 该空间并联机构DOF为3。并且当将  $P_{11}$  副、 $P_{21}$  副以及  $P_{31}$  副设置为驱动副时, 该并联机构的动平台1具有2T1R的输出特性。

1.2.3 机构耦合度  $\kappa$  的求解

1) 并联机构约束度以及耦合度的计算方法

基于序单开链(Single Open Chain, SOC)机构组成理论<sup>[11]108</sup>可知, 第  $j$  个SOC的约束度  $\Delta_j$  的计算式为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $I_j$  为第  $j$  个SOC的驱动副数;  $m_j$  为第  $j$  个SOC的运动副数。

SOC能够同时划分成多个子运动链(Sub Kinematic Chain, SKC), 每个SKC中耦合度求解式为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^k |\Delta_j| \right\} \quad (6)$$

耦合度  $\kappa$  的物理意义是: 可以表示SKC内各个回路中不同变量之间的相关程度。其中,  $\kappa$  值的大小与并联机构的运动学、动力学等过程的求解过程成正比; 对于  $\kappa = 0$  的SKC, 每个回路的变量可以在本身独立回路中求解出; 对于  $\kappa > 0$  的SKC, 回路中的变量则需要通过多个回路方程之间进行联合方可求解。

2) 确定机构的耦合度

在第1.2.2节中已经得到了  $\xi_{L_1} = 4$ ,  $\xi_{L_2} = 5$ 。因此, 两个回路的约束度可以由式(5)分别计算得到, 分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 7 - 2 - 4 = +1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 5 - 1 - 5 = -1$$

再根据式(6)求得耦合度, 即

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k |\Delta_j| = \frac{1}{2} \times (|+1| + |-1|) = 1$$

该并联机构的耦合度  $\kappa = 1$ 。对该机构进行正解求解时, 可以在约束度为+1的独立回路中假设1个虚拟变量; 在约束度为-1的回路中创建包含假设的虚拟变量的约束方程, 最终求得机构的位置正解表达式。

2 并联机构的位置分析

2.1 建立并联机构坐标系并且标注有关参数

设机构静平台0为长度为  $2l_0$  的正方形, 动平台1同样为正方形并且其边长为  $2l_1$ 。创建的动静坐标系具体位置如图3所示。

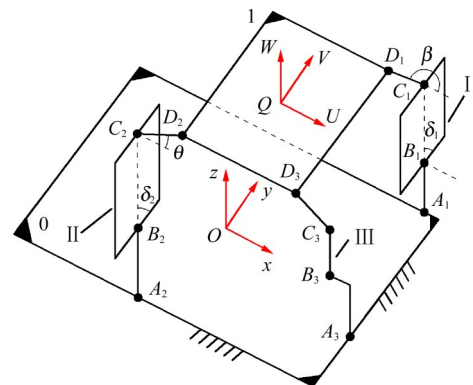


图3 并联机构运动学建模图

Fig. 3 Kinematic modeling diagram of the parallel mechanism

图3中,  $D_1$ 、 $D_3$ 分别位于动平台的两个顶点上,  $D_2$ 位于动平台一条边的中点上。为方便理解和计算, 以图2为基础, 将各个运动副用字母完成标注。其中,  $B_1$ 点为  $P_{11}$ 副与平行四边形机构  $P_{a1}$ 的连接点,  $C_1$ 点为  $R_{13}$ 副与平行四边形机构  $P_{a1}$ 的连接点,  $C_2$ 点为  $R_{22}$ 副与平行四边形机构  $P_{a2}$ 的连接点,  $B_2$ 点为  $P_{21}$ 副与平行四边形机构  $P_{a2}$ 的连接点; 在静平台  $O$ 上建立  $O-xyz$ 坐标系,  $O$ 为静平台的几何中心,  $x$ 轴与  $P_{21}$ 副平行且其正方向指向  $P_{31}$ 副所在的直线,  $y$ 轴与  $P_{31}$ 副平行且其正方向指向  $P_{11}$ 副所在的直线,  $z$ 轴按照笛卡儿坐标系的右手法则确定; 在动平台  $1$ 上建立  $Q-UVW$ 动坐标系, 动坐标系的原点  $Q$ 位于动平台的几何中心上,  $U$ 轴垂直于  $l_{D_1D_3}$ 且其正方向指向  $l_{D_1D_3}$ ,  $V$ 轴平行于  $l_{D_1D_3}$ ,  $W$ 轴按照笛卡儿坐标系右手法则确定。

该机构的尺寸参数为

$$\begin{cases} l_{A_1B_1} = l_{B_1C_1} = l_{C_1D_1} = l_2 \\ l_{A_2B_2} = l_{B_2C_2} = l_{C_2D_2} = l_3 \\ l_{B_3C_3} = l_{C_3D_3} = l_4 \end{cases}$$

令  $B_3$ 点到  $A_3$ 点在  $z$ 轴方向上的高度为  $l_4$ ; 令  $l_{C_1D_1}$ 与  $x$ 轴正方向的夹角为  $\beta$ ; 令  $l_{C_2D_2}$ 与  $x$ 轴正方向的夹角为  $\theta$ 。显然, 在机构设置完成后,  $\beta$ 、 $\theta$ 均为已知值。

## 2.2 机构位置正解公式推导

该机构的位置正解可以描述为: 已知静平台  $O$ 上  $P_{11}$ 副、 $P_{21}$ 副、 $P_{31}$ 副所处的位置分别为  $x_{A_1}$ 、 $x_{A_2}$ 、 $y_{A_3}$ , 求动平台  $1$ 上动坐标系原点  $Q$ 的位置  $(x_Q, y_Q, z_Q)$ 以及动平台的姿态角  $\alpha$ 。

易知  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 点的坐标:  $A_1 = (x_{A_1}, l_0, 0)$ ,  $A_2 = (x_{A_2}, -l_0, 0)$ ,  $A_3 = (l_0, y_{A_3}, 0)$ 。

### 2.2.1 根据 $x_{A_1}$ 、 $x_{A_2}$ 进行计算

在图3中, 令  $l_{B_1C_1}$ 与  $y$ 轴的正方向的夹角为虚拟变量  $\delta_1$ ;  $l_{B_2C_2}$ 与  $y$ 轴正方向的夹角为虚拟变量  $\delta_2$ 。根据第1.2.1节中机构的拓扑约束关系,  $B_1$ 点、 $D_2$ 点的坐标分别为

$$\begin{cases} B_1 = (x_{A_1}, l_0, l_2) \\ D_2 = (x_{A_2} + l_3 \cos \theta, y_{A_3} + l_1, l_3 + l_3 \sin \delta_2 + l_3 \sin \theta) \end{cases} \quad (7)$$

可通过支链 I 和支链 II 的几何位置关系求得动平台与  $x$ 轴正方向的夹角(姿态角)  $\alpha$ , 即

$$l_3 + l_3 \sin \delta_2 + l_3 \sin \theta + 2l_1 \sin \alpha = l_2 + l_2 \sin \delta_1 + l_2 \sin \beta \quad (8)$$

$$x_{A_2} + l_3 \cos \theta + 2l_1 \cos \alpha = x_{A_1} + l_2 \cos \beta \quad (9)$$

### 2.2.2 根据 $y_{A_3}$ 进行计算

由前文的分析易得

$$\begin{cases} y_{D_2} = y_{A_3} + l_1 \\ y_{B_2} = -l_0 \end{cases}$$

由式(9), 并通过支链 I 和支链 III 的几何位置关系、支链 II 和支链 III 的几何位置关系, 可以分别确定虚拟变量  $\delta_1$ 、 $\delta_2$ , 即

$$\begin{cases} \cos \delta_1 = \frac{y_{C_1} - y_{B_1}}{l_2} = \frac{y_{D_1} - y_{B_1}}{l_2} = \frac{y_{A_3} + l_1 - l_0}{l_2} \\ \cos \delta_2 = \frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{l_3} = \frac{y_{D_2} - y_{B_2}}{l_3} = \frac{y_{A_3} + l_0}{l_3} \end{cases} \quad (10)$$

由平行四边形机构的特性可知,  $\delta_1$ 、 $\delta_2$ 的数值不小于0。由式(10)易得

$$\begin{cases} \sin \delta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{y_{A_3} + l_1 - l_0}{l_2}\right)^2} \\ \sin \delta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{y_{A_3} + l_0}{l_3}\right)^2} \end{cases} \quad (11)$$

联立式(8)、式(9), 消除  $\beta$  可得

$$D \sin \alpha + E \cos \alpha + F = 0$$

则有

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{-DF \pm \sqrt{D^2 E^2 + E^4 - F^2 E^2}}{D^2 + E^2} \\ \cos \alpha = -\frac{F}{E} + \frac{D^2 F \mp D \sqrt{D^2 E^2 + E^4 - F^2 E^2}}{E(D^2 + E^2)} \end{cases} \quad (12)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{-DF \pm \sqrt{D^2 E^2 + E^4 - F^2 E^2}}{D^2 + E^2}$$

式中,  $\alpha$ 取逆时针方向为正;  $D = 4l_1(l_3 + l_3 \sin \theta - l_2 - l_2 \sin \delta_1 + l_3 \sin \delta_2)$ ;  $E = 4l_1(x_{A_2} + l_3 \cos \theta - x_{A_1})$ ;  $F = (l_3 + l_3 \sin \theta - l_2 - l_2 \sin \delta_1 + l_3 \sin \delta_2)^2 - l_2^2 + (x_{A_2} + l_3 \cos \theta - x_{A_1})^2 + 4l_1^2$ 。

根据  $D_2$ 点的坐标, 可以得出动平台基点  $Q$ 的坐标, 即

$$\begin{cases} x_Q = x_{D_2} + l_1 \cos \alpha = x_{A_2} + l_3 \cos \theta + l_1 \cos \alpha \\ y_Q = y_{D_2} = y_{A_3} + l_1 \\ z_Q = z_{D_2} + l_1 \sin \alpha = l_3 + l_3 \sin \delta_2 + l_3 \sin \theta + l_1 \sin \alpha \end{cases} \quad (13)$$

按照装配的通常情况, 将图3所示机构中支链 I 和支链 II 以及动平台  $1$ (第1回路)在  $yOz$ 平面上投影, 可以得到第1回路投影图(图4)。

图4(a)表示并联机构的装配情况为  $R_{22}$ 副、 $R_{34}$ 副、 $R_{13}$ 副的轴线与静平台  $O$ 不平行; 图4(b)表示并联机构的装配情况为  $R_{22}$ 副、 $R_{34}$ 副、 $R_{13}$ 副的轴线与静平台  $O$ 平行。在实际装配中, 图4(a)的方式相对图4(b)来说难度更大。为了简化计算, 降低装配难度, 本文选择图4(b)这种装配情况( $R_{22}$ 副、 $R_{34}$ 副、

$R_{13}$ 副的轴线与静平台0保持平行)完成相关计算。

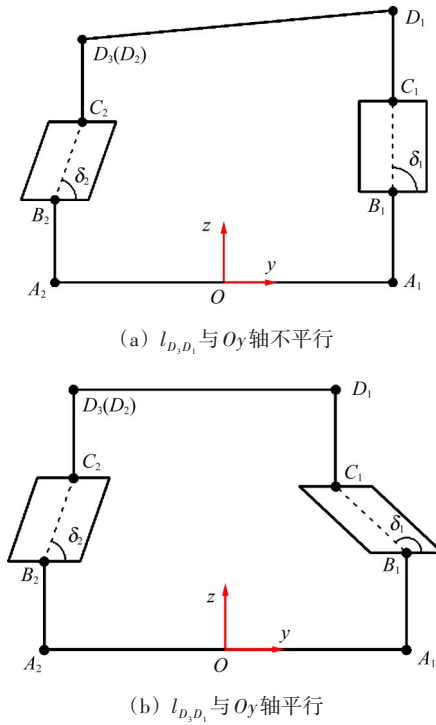


图4 第1回路投影图

Fig. 4 Projection diagram of the 1st circuit

1) 当  $l_2 = l_3$  时

由图4(b)可知,  $\delta_1, \delta_2$  存在关系  $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$ 。所以, 可以得到:  $D = 4l_1(l_3 + l_3 \sin \theta - l_2)$ ;  $E = 4l_1(x_{A_2} + l_3 \cos \theta - x_{A_1})$ ;  $F = (l_3 \sin \theta)^2(x_{A_2} + l_3 \cos \theta - x_{A_1})^2 + 4l_1^2$ 。由式(12)可知, 此时姿态角  $\alpha$  与  $y_{A_3}$  的输入无关。根据式(12)、式(13)可得

$$\begin{cases} \alpha = f_{F1}(x_{A_1}, x_{A_2}) \\ x_Q = f_{F2}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \\ y_Q = f_{F3}(x_{A_1}, x_{A_2}) \\ z_Q = f_{F4}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \end{cases} \quad (14)$$

2) 当  $l_2 \neq l_3$  时

图4(b)中的  $\delta_1, \delta_2$  只能通过式(10)来求得。显然, 式(12)中的  $D, F$  都与  $y_{A_3}$  有关。再由式(12)、式(13)可知

$$\begin{cases} \alpha = f_{F5}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \\ x_Q = f_{F6}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \\ y_Q = f_{F7}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \\ z_Q = f_{F8}(x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}) \end{cases} \quad (15)$$

该空间并联机构在完成制造装配后, 参数  $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, \theta$  均为固定值。当参数  $l_2, l_3$  满足  $l_2 = l_3$  时, 动平台基点  $Q$  中  $y_Q = f_{F3}(x_{A_1}, x_{A_2})$ , 姿态角  $\alpha = f_{F1}(x_{A_1}, x_{A_2})$ , 说明此时机构运动输入-输出变量之间

存在部分运动解耦性; 当参数  $l_2, l_3$  不满足  $l_2 = l_3$  时, 由式(15)可知, 机构运动输入-输出变量之间不存在运动解耦性。为了降低并联机构运动学、动力学分析以及机构运动控制的难度, 在进行并联机器人机构设计时, 需要重点考虑机构运动输入-输出变量之间的运动解耦性。因此, 在满足同样的运动性能(2T1R运动形式)的前提下, 固定参数在装配制造中应选择满足  $l_2 = l_3$  的条件。

### 2.3 机构位置逆解公式推导

在动平台1上, 已知  $Q$  点的位置坐标  $(x_Q, y_Q, z_Q)$  以及姿态角  $\alpha$ , 计算静平台0上3个驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的位置  $x_{A_1}, x_{A_2}, y_{A_3}$ 。

#### 2.3.1 求驱动副 $P_{21}$ 的位置 $x_{A_2}$

在式(13)中有

$$x_Q = x_{A_2} + l_3 \cos \theta + l_1 \cos \alpha$$

通过等式两端移项可以得到

$$x_{A_2} = x_Q - l_3 \cos \theta - l_1 \cos \alpha \quad (16)$$

#### 2.3.2 求驱动副 $P_{31}$ 的位置 $y_{A_3}$

在式(13)中有

$$y_Q = y_{A_3} + l_1$$

通过等式两端移项可以得到

$$y_{A_3} = y_Q - l_1 \quad (17)$$

#### 2.3.3 求驱动副 $P_{11}$ 的位置 $x_{A_1}$

由图3的结构关系并通过支链III计算可得

$$\begin{cases} z_Q + l_1 \sin \alpha = l_2 + l_2 \sin \delta_1 + l_2 \sin \beta \\ x_Q + l_1 \cos \alpha = x_{A_1} + l_2 \cos \beta \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)消除  $\beta$  可得

$$(x_Q + l_1 \cos \alpha - x_{A_1})^2 + (z_Q + l_1 \sin \alpha - l_2 - l_2 \sin \delta_1)^2 - l_2^2 = 0 \quad (19)$$

联立式(11)、式(19), 即可得到  $x_{A_1}$ 。

### 2.4 正解验证

在并联机构制造装配完成后, 参数  $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, \theta$  均为固定值。为方便计算, 取该并联机构的结构参数为:  $2l_0 = 200 \text{ mm}, 2l_1 = 150 \text{ mm}, l_2 = 200 \text{ mm}, l_3 = 200 \text{ mm}, l_4 = 150 \text{ mm}, \theta = 0^\circ$ 。取静平台0上3个驱动副  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  的位置分别为  $x_{A_1} = 50 \text{ mm}, x_{A_2} = -50 \text{ mm}, y_{A_3} = -20 \text{ mm}$ 。

将已知参数代入式(12)、式(13)中求解, 得到的位置正解数值如表1所示。

### 2.5 逆解验证

将表1中第1组正解数值代入式(16)、式(17)、式(19), 可以得到两组位置逆解值, 如表2所示。其中, 序号1的逆解数值与正解中的3个驱动副输入值很接近。

表1 并联机构位置正解数值

Tab. 1 Numerical forward solution of the parallel mechanism

序号	$x_0/\text{mm}$	$y_0/\text{mm}$	$z_0/\text{mm}$	$\alpha/(\text{°})$
1	168.75	55	399.0107	75
2	168.75	55	399.0107	105
3	168.75	55	253.7738	-75.525
4	168.75	55	253.7738	-104.4775

表2 并联机构位置逆解数值

Tab. 2 Numerical inverse solution of the parallel mechanism

序号	$x_{A_1}/\text{mm}$	$x_{A_2}/\text{mm}$	$y_{A_3}/\text{mm}$
1	50	-50	-20
2	325	-50	-20

通过正逆解数值验算, 能够证明正逆解公式是正确的。

### 3 平移运动特性分析

#### 3.1 刚体运动的基本形式

机构末端构件的运动属于刚体运动。刚体运动存在平移和旋转两种基本的运动形式, 将平移运动再次分类, 又可划分为平直运动[图5(b)]与弯曲平移[图5(c)]两种运动形式<sup>[17]</sup>。

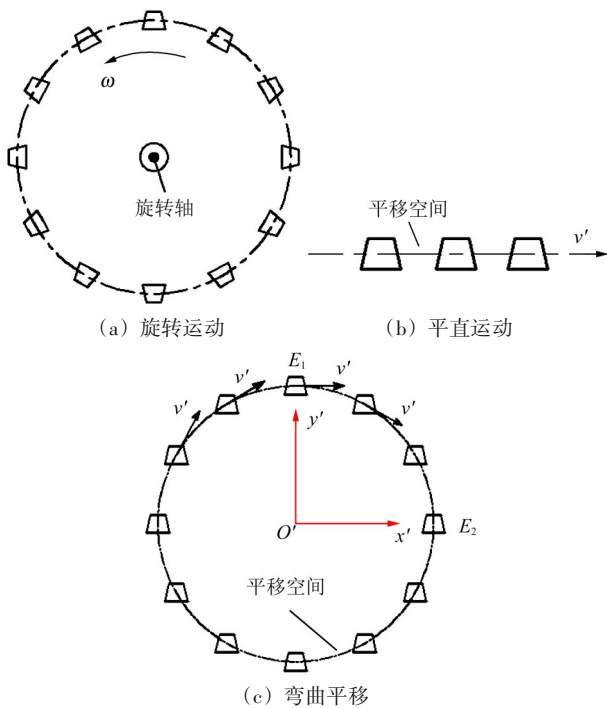


图5 刚体运动的基本类型

Fig. 5 Basic types of the rigid body motion

刚体在平面上平直运动[图5(b)]时, 其运动轨迹为一条直线。

刚体在平面上弯曲平移时, 在笛卡儿坐标系中, 其位置变化存在不同方向的平移组合, 并且刚体的运动轨迹为一条曲线。图5(c)中, 刚体从 $E_1$ 点移动到 $E_2$ 点, 从笛卡儿坐标系可以看出, 存在 $x'$ 轴方向

与 $y'$ 轴方向的平移组合。

#### 3.2 验证并联机构平移特性

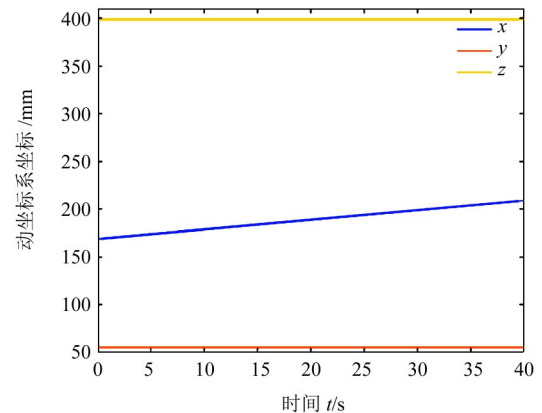
为了证明该并联机构具有不同的平移特性, 利用 Matlab 软件进行仿真验证, 明确驱动副在不同运动轨迹下, 动平台的位置变化规律及姿态角变化特征。

##### 3.2.1 驱动副的第一种运动形式

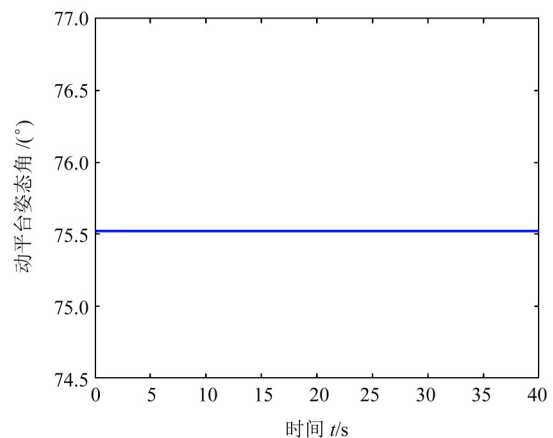
使用第2.4节中的杆长数据及 $\theta$ 值, 令3个驱动副在时间 $t \in [0, 40]$ s内的运动方式为: 驱动副 $y_{A_3}$ 位置保持恒定不变, 驱动副 $x_{A_1}$ 、 $x_{A_2}$ 保持相同的运动速度。3个驱动副的具体运动轨迹分别为

$$\begin{cases} x_{A_1} = 50 \text{ mm} + 1 \text{ mm/s} \cdot t \\ x_{A_2} = -50 \text{ mm} + 1 \text{ mm/s} \cdot t \\ y_{A_3} = -20 \text{ mm} \end{cases} \quad (20)$$

由表1可知, 并联机构在初始位置时, 动平台存在两种不同的位置。现将表1中第1组数值作为动平台的初始位置, 根据机构位置正解表达式(12)、式(13), 使用 Matlab 软件计算得到机构的动平台基点位置及姿态角随时间变化的曲线, 如图6所示; 计算得到的动平台基点三维轨迹如图7所示。



(a) 动平台基点坐标位置变化



(b) 动平台姿态角变化

图6 动平台基点位置及姿态角变化

Fig. 6 Base point position and attitude angle variation of the moving platform

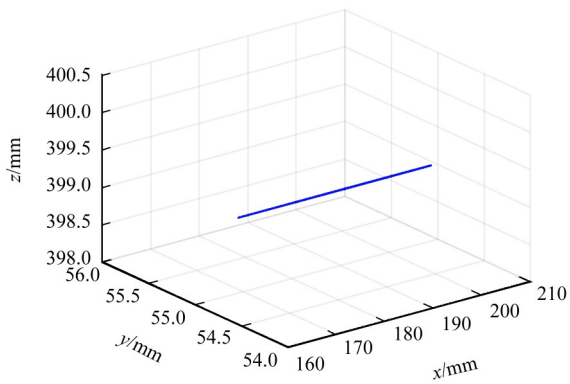


图7 动平台基点轨迹三维图

Fig. 7 Three-dimensional diagram of the base point trajectory of the moving platform

由图6可知, 驱动副在第一种驱动轨迹下, 动平台的姿态角度保持恒定不变, 动平台位置变化只在  $x$  轴方向有数值改变, 并且动平台的运动轨迹为一条直线。由图7可知, 驱动副在第一种运动轨迹下, 动平台基点轨迹三维图为空间的一条直线。该结果说明, 3个驱动副处于第一种驱动轨迹下, 得到的动平台运动轨迹符合刚体平直运动。

### 3. 2. 2 驱动副的第二种运动形式

同理, 使用第2.4节中的杆长数据及  $\theta$  值, 令3个驱动副在时间  $t \in [0, 40]$ s 内的运动方式为: 驱动副  $x_{A_1}$ 、 $x_{A_2}$  保持恒定不变, 驱动副  $y_{A_3}$  位置保持恒定速度运动。3个驱动副的具体运动轨迹分别为

$$\begin{cases} x_{A_1} = 50 \text{ mm} \\ x_{A_2} = -50 \text{ mm} \\ y_{A_3} = -20 \text{ mm} + 1 \text{ mm/s} \cdot t \end{cases} \quad (21)$$

将表1中第1组数值作为动平台的初始位置, 根据并联机构位置正解公式, 使用Matlab软件编程计算, 得到的动平台基点位置变化曲线如图8所示; 基点轨迹如图9所示; 姿态角随时间变化的曲线如图10所示。

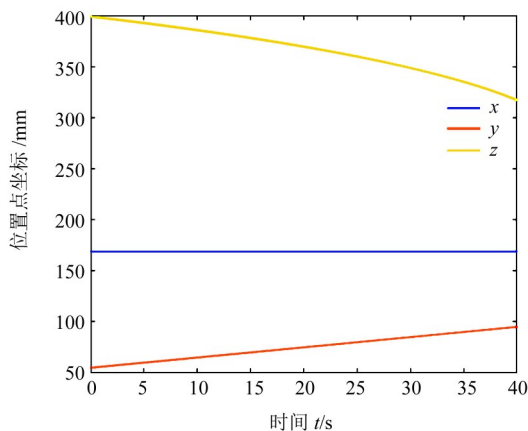
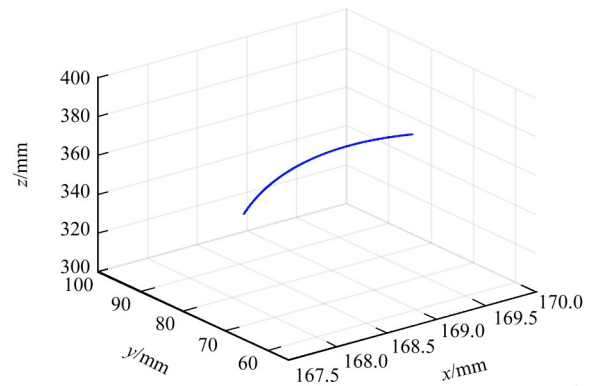
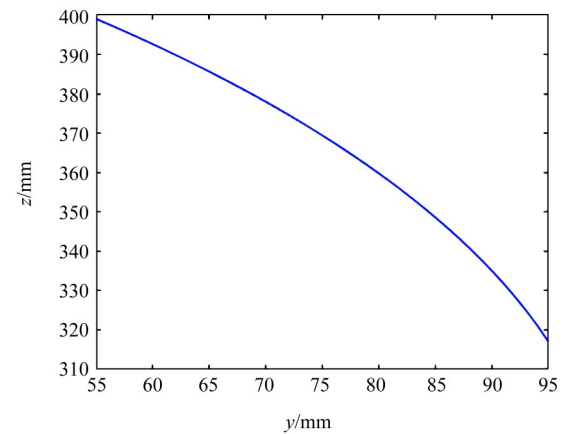


图8 动平台基点坐标位置变化

Fig. 8 Variation of the base point coordinate position of the moving platform



(a) 空间三维图



(b)  $yOz$  平面图

图9 动平台基点轨迹图

Fig. 9 Diagram of the base point trajectory of the moving platform

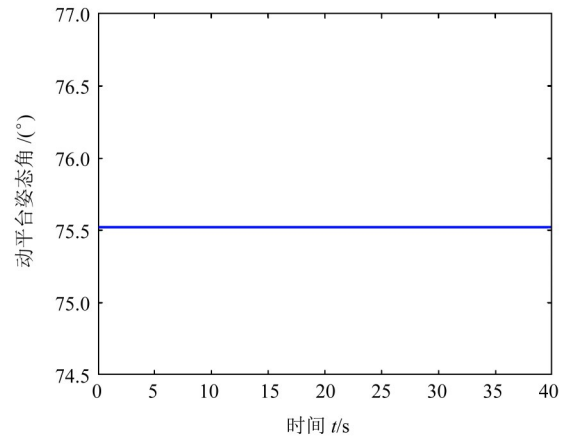


图10 姿态角-时间变化曲线

Fig. 10 Attitude angle-time variation curve

由图8~图10可知, 在驱动副  $P_{31}$  保持恒定运动速度且其他驱动副保持静止不动时, 动平台基点的轨迹为空间曲线, 且动平台的姿态角未发生改变。这说明在驱动副保持第二种运动形式时, 机构动平台可实现弯曲平移运动。

## 4 结论

1) 综合考虑方位特征集的并联机构拓扑设计

方法,提出一种新型的两平移—转动(2T1R)并联结构,并对所提机构开展了拓扑特性分析。通过计算得出,所设计的2T1R并联机构耦合度为1、自由度为3。

2) 对所设计机构的运动学以及位置正逆解公式进行了分析求解,并对正逆解公式开展了数值验证。验证结果证明,正逆解公式是正确的。

3) 明确了该机构的结构尺寸参数对并联机构运动输入—输出变量之间的运动解耦性的影响。

4) 使用Matlab软件进行的仿真验证证明,该平台同时具有平直运动和弯曲平移的运动输出特性。

#### 参 考 文 献

- [1] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012:108,196-213.  
YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and application of robot mechanism topology [M]. Beijing: Science Press, 2012:108,196-213.
- [2] 吉昊,沈惠平,杨廷力. 一种新型低耦合度半对称2T1R并联机构的拓扑设计及运动学[J]. 机械传动,2020,44(1):13-22.  
JI Hao, SHEN Huiping, YANG Tingli. Topology design and kinematics for a novel semi-symmetric 2T1R parallel mechanism with low coupling degree [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020,44(1):13-22.
- [3] 刘伟,刘宏昭. 具有2T1R与2R1T运动模式3自由度并联机构型综合[J]. 农业机械学报,2018,49(7):401-409.  
LIU Wei, LIU Hongzhao. Type synthesis of 3-DOF parallel mechanism with 2T1R and 2R1T motion mode [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018,49(7):401-409.
- [4] 邓嘉鸣,许可,赵迎春,等. 无寄生运动非对称空间2T1R并联机构设计与运动学分析[J]. 农业机械学报,2018,49(6):408-417.  
DENG Jiaming, XU Ke, ZHAO Yingchun, et al. Design and kinematics analysis of asymmetric 2T1R-type spatial parallel mechanism without parasitic motion [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018,49(6):408-417.
- [5] 林浩,石志新,罗玉峰,等. 可用于铺盘调节的2T1R并联机构的综合与运动学分析[J]. 机械传动,2022,46(5):48-52.  
LIN Hao, SHI Zhixin, LUO Yufeng, et al. Synthesis and kinematics analysis of a 2T1R parallel mechanism that can be used for spreading tray adjustment [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022,46(5):48-52.
- [6] 吴鑫,陈美丽,张彦斌. 2T1R并联机构位置及奇异性分析[J]. 农业机械学报,2010,41(2):208-213.  
WU Xin, CHEN Meili, ZHANG Yanbin. Analysis of position and singularity of a parallel mechanism with three degrees of freedom [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010,41(2):208-213.
- [7] 杜中秋,沈惠平,李菊,等. 一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型2T1R并联机构动力学分析[J]. 机电工程,2023,40(8):1231-1239.  
DU Zhongqiu, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Dynamics analysis of a new 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and partially motion decoupled [J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023,40(8):1231-1239.
- [8] 沈惠平,朱晨阳,李菊,等. 零耦合度部分运动解耦2T1R并联机构拓扑与性能研究[J]. 农业机械学报,2023,54(2):419-429.  
SHEN Huiping, ZHU Chenyang, LI Ju, et al. Topology and performance analysis of 2T1R parallel mechanism with zero coupling degree and motion decoupling [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023,54(2):419-429.
- [9] WANG J S, LIU X J. Analysis of a novel cylindrical 3-DoF parallel robot [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2003,42(1):31-46.
- [10] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain [J]. Journal of Mechanical Design, 2005,127(6):1113-1121.
- [11] 张彦斌,吴鑫,刘宏昭. 完全各向同性2T1R空间并联机器人机构型综合[J]. 农业机械学报,2011,42(11):200-207.  
ZHANG Yanbin, WU Xin, LIU Hongzhao. Structural synthesis of fully-isotropic 2T1R spatial parallel robotic manipulators [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(11):200-207.
- [12] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社,2004:124-133.  
YANG Tingli. Topology structure design of robot mechanisms [M]. Beijing: China Machine Press, 2004:124-133.
- [13] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等. 一种具有部分运动解耦和符号式位置正解的空间2T1R并联机构拓扑设计与动力学建模[J]. 中国机械工程,2022,33(2):160-169.  
HUANG Kaiwei, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Topological design and dynamics modeling of a spatial 2T1R parallel mechanism with partially motion decoupling and symbolic forward kinematics [J]. China Mechanical Engineering, 2022,33(2):160-169.
- [14] 沈惠平,周金波,尤晶晶,等. 具有解析式位置正解的2T1R并联机构运动性能分析[J]. 农业机械学报,2020,51(1):398-409.  
SHEN Huiping, ZHOU Jinbo, YOU Jingjing, et al. 2T1R parallel mechanism with analytic positive position solutions and its kinematic performance based optimization [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020,51(1):398-409.
- [15] 刘伟,刘宏昭. 具有3T、2T1R和2R1T模式的并联机构型综合[J]. 农业机械学报,2019,50(12):411-419.  
LIU Wei, LIU Hongzhao. Synthesis of parallel mechanism with 3T, 2T1R and 2R1T motion modes [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(12):411-419.

- [16] 沈惠平, 仲锐, 李菊, 等. 运动副分布顺序对并联机构运动学与动力学性能的影响[J]. 农业机械学报, 2023, 54(7): 412-426.  
SHEN Huiping, ZHONG Rui, LI Ju, et al. Influence of different distribution order of joints on kinematic and dynamic performance of parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(7): 412-426.
- [17] 石志新, 叶梅燕, 罗玉峰. 弯曲平移机构运动特征描述与分析方法研究[J]. 机械工程学报, 2020, 56(21): 79-88.  
SHI Zhixin, YE Meiyang, LUO Yufeng. Research on the description and analysis method for the motion characteristics of bending translation mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(21): 79-88.

## Design and analysis of 2T1R parallel mechanism with two kinds of translation characteristics

CAI Xiang<sup>1</sup> GAO Bo<sup>2</sup> SHI Zhixin<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Hubei Polytechnic Institute, Xiaogan 432000, China)

(2. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Xinxing Vocational and Technical College, Xinxing 839000, China)

(3. School of Advanced Manufacturing, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

**Abstract:** [Objective] To address the issue that achieving curved translation in two-translation one-rotation (2T1R) parallel mechanisms requires complex curve-fitting algorithms, a novel mechanism capable of realizing curved translation by leveraging its inherent characteristics was designed. [Methods] Firstly, based on the parallel mechanism design theory of the position and orientation characteristic (POC) set equation, a 2T1R parallel mechanism with a symbolic forward position solution was designed. The topological properties of this mechanism, including its POC set, degree of freedom, and coupling degree, were analyzed. Secondly, following the kinematic modeling principles of topological structures, the symbolic forward and inverse position solution equations of the mechanism were derived, and their correctness was verified through numerical calculations. Finally, the curved translation and straight-line motion characteristics of the mechanism were validated using Matlab software. [Results] Test results demonstrate that the designed mechanism exhibits both straight-line and curved translation capabilities within its workspace, significantly simplifying the complexity of achieving curved translation and reducing the difficulty of control algorithms.

**Key words:** Parallel mechanism; Topological design; Bending translation; Analytical solution; Coupling degree

